|  |
| --- |
| министерство образования республики беларусь белорусский государственный университет |
| Функциональный анализ |
| Лабораторная работа №1 |
|  |
| (Отображения в нормированных векторных пространствах) |
|  |

Студентки 3 курса 3 группы

|  |
| --- |
|  |

**Преподаватель**

Дайняк Виктор Владимирович

Доцент кафедры МФ

канд. физ.-мат. наук

Работа сдана 15.11.2013 г.

Зачтена \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2013 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Задание №1

## Постановка задачи

Определите, при каких для следующего интегрального уравнения Фредгольма 2-ого рода в простарнстве , можно применить метод сжимающих отображений. При найти приближенное решение методом последовательных приближений с точностью и сравнить его с точным решением.

## Решение

Приведем уравнение к виду , тогда искомое решение является неподвижной точкой отображения . Поскольку оба пространства и являются полными, то нужно показать, что отображение сжимающее на соответствующих прострнствах.

Пусть

### Рассмотрим пространство .

задает отображения пространства на себя, так как состоит из суммы двух непрерывных функций.

Покажем, что – сжимающее, то есть , такая что для всех выполняется .

Таким образом является коэффициентом сжатия, и при к уравнению можно применить принцип сжимающих отображений и оно будет иметь единственное решение.

Рассмотри приближенное решение уравнения при . Оценим количество приближений по формуле:

Пусть . Тогда , , а .

Вычислим приближенные значения до , так как уже является приближенным решением с точностью .

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения имеет вид:

Так как исходное уравнение представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, то можно вычислить его точное решение. Обозначим через . Тогда . Подставляя его в исходное уравнение получаем:

Вычислим :

### Рассмотрим пространство .

Оценим ядро :

Таким образом, является отображением на себя и является сжимающим, если , поэтому к данному уравнению, при можно применить принцип сжимающих отображений. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением:

# Задание 2

## Постановка задачи

Вычислить приближенное решение следующего уравнения с точностью до .

## Решение

Приведем уравнение к виду и найдем точку и радиус , такие, что шар инвариантен относительно отображения и в этом шаре – сжимающее отображение.

Так как – дифференцируема, то в качестве константы Липшица возьмем .

Число – радиус шара, в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

Где , а тогда .

Выберем одно из решений этой системы. Пусть . Тогда отрезок инвариантен относительно отображения , на нем – сжимающее и . Оценим расстояние до неподвижной точки:

Отсюда b является приближенным решением уравнения с точностью до .

# Задание 3

## Постановка задачи

Определить, является ли отображение нормированного пространства на себя сжимающим. Вычислить , где , и оценитьрасстояние от до неподвижной точки.

## Решение

Вычислим

Значит , а значит F – сжимающее.

# Задание 4

## Постановка задачи

Выяснить, является ли отображение непрерывным, равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица.

## Решение

Покажем, что отображение удовлетворяет условию Липшица. Для этого оценим.

Тогда для такое, что для , таких, что

Таким образом, отображение, удовлетворяет условию Липшица, а значит является непрерывным и равномерно непрерывным.